УДК 517.9
DOI 10.24411/2409-3203-2019-121124

ПРИМЕР ЗАДАЧИ КОШИ для системы со свободными членами

Донцова Марина Владимировна
к.ф.-м.н., старший преподаватель кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Россия, г. Нижний Новгород

Аннотация: В предыдущей работе Донцовой М.В. с помощью метода дополнительного аргумента определены достаточные условия существования нелокального решения задачи Коши для одной системы двух квазилинейных уравнений первого порядка со свободными членами. В данной работе приведен пример задачи Коши для системы со свободными членами, которая имеет единственное нелокальное решение.

Ключевые слова: метод дополнительного аргумента, задача Коши.

AN EXAMPLE OF A CAUCHY PROBLEM FOR A SYSTEM WITH FREE TERMS

Dontsova Marina Vladimirovna
PhD, Senior Lecturer of the department
of differential Equations, mathematical and numerical analysis
Lobachevsky State University
Russia, the city of Nizhny Novgorod

Abstract: In the previous work of M.V. Dontsova, sufficient conditions for the existence of a nonlocal solution of the Cauchy problem for one system of two first-order quasi-linear equations with free terms were determined using the additional argument method. This paper gives an example of the Cauchy problem for a system with free terms that has a unique nonlocal solution.

Keywords: method of an additional argument, Cauchy problem.

В статье [1] рассмотрена задача Коши для системы вида

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + S_1(u,v)\partial_x u(t,x) = f_1(t,x), \\ \partial_t v(t,x) + S_2(u,v)\partial_x v(t,x) = f_2(t,x), \end{cases} \qquad (1)$$

где $u(t,x), v(t,x)$ – неизвестные функции, $f_1(t,x), f_2(t,x)$, S_1, S_2 – известные функции, с начальными условиями

$$u(0,x) = \varphi_1(x), v(0,x) = \varphi_2(x), \qquad (2)$$

на $\Omega_T = \{(t,x) | 0 \le t \le T, x \in (-\infty,\infty), T > 0\}$.

Обозначим $\overline{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$ – пространство функций один раз дифференцируемых по переменной t, дважды дифференцируемых по переменной x, имеющих смешанные производные второго порядка и ограниченные вместе со своими производными на Ω_T, $C_\varphi = \max\{\sup_R |\varphi_i^{(l)}| \,|\, i = 1,2, l = \overline{0,2}\}$, $N_f = \max\{\sup_{\Omega_T} |f_i|, \sup_{\Omega_T} |\partial_x f_i|, i = 1,2\}$,

$Z_K = \{(u,v) | u,v \in [-K,K]\}$, где K - положительное число.

В статье [1] с помощью метода дополнительного аргумента [2], [3] при выполнении условий $\varphi_1, \varphi_2 \in \overline{C}^2(R),\ f_1(t,x), f_2(t,x) \in \overline{C}^{2,2}(\Omega_T),\ S_1, S_2 \in \overline{C}^{2,2}(Z_K),\ K = C_\varphi + TN_f$, $\partial_u S_1 < 0, \partial_v S_1 > 0, \partial_u S_2 < 0, \partial_v S_2 > 0$ на Z_K, $\varphi_1'(x) \le 0, \varphi_2'(x) \ge 0$ на R, $\partial_x f_1 \le 0, \partial_x f_2 \ge 0$ на Ω_T установлено, что для любого $T > 0$ задача Коши (1), (2) имеет единственное решение $u(t,x), v(t,x) \in \overline{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$.

В данной статье рассмотрим пример.

Пример.

Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \dfrac{1}{10^{u-2v}+5}\partial_x u(t,x) = t + \dfrac{1}{12^x+1}, \\ \partial_t v(t,x) + \dfrac{1}{11^{u-3v}+7}\partial_x v(t,x) = \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{e^x+8}, \end{cases} \tag{3}$$

где $u(t,x), v(t,x)$ – неизвестные функции.

Поставим для системы уравнений (3) задачу Коши, т.е. зададим начальные условия:

$$u(0,x) = \varphi_1(x) = 11 - \operatorname{arctg} 3x,\ v(0,x) = \varphi_2(x) = 8 + \operatorname{arctg} 2x. \tag{4}$$

Задача (3), (4) определена на $\Omega_T = \{(t,x) | 0 \le t \le T, x \in (-\infty, \infty), T > 0\}$.

Здесь $S_1(u,v) = \dfrac{1}{10^{u-2v}+5}$, $S_2(u,v) = \dfrac{1}{11^{u-3v}+7}$, $f_1(t,x) = t + \dfrac{1}{12^x+1}$,

$$f_2(t,x) = \frac{t}{2} - \frac{1}{e^x+8},\ \partial_x f_1 = -\frac{12^x \ln 12}{(12^x+1)^2}, \partial_x f_2 = \frac{e^x}{(e^x+8)^2},\ \varphi_1'(x) = -\frac{3}{1+9x^2},$$

$$\varphi_2'(x) = \frac{2}{1+4x^2},\ \varphi_1''(x) = \frac{54x}{(1+9x^2)^2},\ \varphi_2''(x) = -\frac{16x}{(1+4x^2)^2},$$

$$C_\varphi = \max\{\sup_R |\varphi_i^{(l)}| | i = 1,2, l = \overline{0,2}\} = 11 + \frac{\pi}{2},$$

$$N_f = \max\{\sup_{\Omega_T} |f_i|, \sup_{\Omega_T} |\partial_x f_i|, i = 1,2\} = T + 1,$$

$$K = C_\varphi + TN_f = 11 + \frac{\pi}{2} + T^2 + T.$$

Так как $\varphi_1, \varphi_2 \in \overline{C}^2(R),\ f_1(t,x), f_2(t,x) \in \overline{C}^{2,2}(\Omega_T),\ S_1, S_2 \in \overline{C}^{2,2}(Z_K)$,

$$K = 11 + \frac{\pi}{2} + T^2 + T,$$

$$\partial_u S_1 = -\frac{10^{u-2v}\ln 10}{(10^{u-2v}+5)^2} < 0, \partial_v S_1 = \frac{10^{u-2v} 2\ln 10}{(10^{u-2v}+5)^2} > 0, \partial_u S_2 = -\frac{11^{u-3v}\ln 11}{(11^{u-3v}+7)^2} < 0,$$

$$\partial_v S_2 = \frac{11^{u-3v} 3\ln 11}{(11^{u-3v}+7)^2} > 0 \text{ на } Z_K,$$

$$\varphi_1'(x) = -\frac{3}{1+9x^2} < 0,\ \varphi_2'(x) = \frac{2}{1+4x^2} > 0 \text{ на } R,$$

$$\partial_x f_1 = -\frac{12^x \ln 12}{(12^x+1)^2} < 0, \partial_x f_2 = \frac{e^x}{(e^x+8)^2} > 0 \text{ на } \Omega_T,$$

то задача Коши (3), (4) имеет единственное решение $u(t,x), v(t,x) \in \overline{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00125 мол_а.

Список литературы:

1. Донцова М.В. Условия нелокальной разрешимости одной системы двух квазилинейных уравнений первого порядка со свободными членами // Журнал Средневолжского математического общества. – 2019. – Т. 21. – № 3. – С. 317-328.

2. Иманалиев М. И., Алексеенко С. Н. К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Доклады РАН. – 2001. – Т.379. – №1. – С. 16–21.

3. Иманалиев М.И., Панков П.С., Алексеенко С.Н. Метод дополнительного аргумента // Вестник КазНУ. Серия «Математика, механика, информатика. Спец. выпуск. - 2006. - № 1. - С. 60–64.